

Règle ligne-colonne pour AB (important)

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \quad B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$$

alors $\forall 1 \leq i \leq m$ et $\forall 1 \leq j \leq p$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

$$= \underbrace{A_{i,1} \cdot B_{1,j}}_{k=1} + \underbrace{A_{i,2} \cdot B_{2,j}}_{k=2} + \dots + \underbrace{A_{i,n} \cdot B_{n,j}}_{k=n}$$

justification:

en effet, la j ème colonne de AB

est par définition

$$A \vec{b}_j \in \mathbb{R}^m$$

(où $\vec{b}_j$ est la
 j ème colonne de B)

et la i ème composante de $A \vec{b}_j$

est égale au produit scalaire de la i ème

ligne de A avec $\vec{b}_j$.

Or la i -ème ligne de A est

$$\vec{a}_i = (A_{i,1} \quad A_{i,2} \quad A_{i,3} \quad \dots \quad A_{i,n})$$

$$\text{et } \vec{b}_j = \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ B_{2,j} \\ \vdots \\ B_{n,j} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = A_{i,1} \cdot B_{1,j} + A_{i,2} \cdot B_{2,j} + \dots + A_{i,n} \cdot B_{n,j}$$

$$= \sum_{k=1}^n A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

(cqd
règle
du
produit
de
matrices)

Théorème sans numéro :

Propriétés des opérations matricielles

Soient A, B, C des matrices (composables)
carrées (ou de même taille) (Th2, p. 106)

$$a) A(BC) = (AB)C$$

$$b) A(B+C) = AB + AC$$

$$c) (B+C)A = BA + CA$$

$$d) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$e) \text{ si } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ alors}$$

$$I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$$

↖ matrice identité $n \times n$

NB : • Il se peut que AB soit défini
sans que BA le soit

• Même si AB et BA sont définis

on peut avoir $AB \neq BA$.

ex:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

AB est défini,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 15 & 15 & 15 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

mais BA n'est pas défini,

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$AB \neq BA$ pour des raisons de taille.

$$3) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \nRightarrow$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $\triangle$ on peut avoir des $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
t.q. $A \neq O_n$ mais t.q. $A^2 = O_n$

ex: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pire: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3 \times 3}$$

+ général. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

alors $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

et $A^n = O_n$

de telles matrices sont dites nilpotentes

(⚠ Dans $\mathbb{R}$, $x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

Rem: les opérations sont similaires
aux opérations sur les réels.

mais ⚠ pas de $AB = BA$

en particulier: les identités remarquables
ne sont pas en
vigueur pour
les matrices

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

par contre

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

§ 2.1.3 Puissances d'une matrice carrée

Déf : Pour $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ carrée

et pour $k \geq 0$ entier on définit
la $k^{\text{ème}}$ puissance de A , notée A^k
par la formule (récurrente)

$$\begin{cases} A^0 \stackrel{\text{dét}}{=} I_n & (\text{matrice identité}) \quad k=0 \\ A^{k+1} = A^k \cdot A & \text{si } k \geq 0 \end{cases}$$

$$(A^1 = A^0 \cdot A = I_n \cdot A = A$$

$$\text{et } A^2 = A^1 \cdot A = A \cdot A \text{ raisonant ...})$$

ex:

1) Si A est diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}_{n \times n}$

alors $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ encore diagonale.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}_1$$

$$A^2 \vec{x}_0 = A(A \vec{x}_0) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}_2$$

$$A^3 \vec{x}_0 = A \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x}_3$$

$$A^4 \vec{x}_0 = A \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{x}_4$$

Posons :

$$\begin{cases} F_0 = 0 & F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

les premiers
termes
de la
suite
de Fibonacci

alors $A^n \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$

càd $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$

Fibonacci : Leonardo Pisano
(1170-1250)

Libro-Abaci 1202

intéressé
à Florence
en 1280!

↳ introduit le système numérique
indo-arabe

4) Soit $\theta \in \mathbb{R}$

et soit $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

la matrice associée à la rotation
d'angle θ centrée en $(0,0)$

alors

$$A_\theta^2 = A_\theta \cdot A_\theta = \text{rotation d'angle } 2\theta$$

$$A_\theta^3 = \text{rot. d'angle } 3\theta$$

⋮

$$A_\theta^k = \text{rot d'angle } k\theta \quad k \in \mathbb{N}$$

exemple : $\theta = \frac{2\pi}{11}$ $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right) \end{pmatrix}$

alors $A_{\frac{2\pi}{11}}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) Plus général. $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$

alors

$$A_\theta \cdot A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$$

idée de démo:

produit matriciel

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cdot \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi & \\ & \end{pmatrix}$$

Formules trigo

$$\Downarrow = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix}$$

§2.1.4 Transposée d'une matrice

Def: Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ on définit

$$\text{par } A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$



la matrice définie par

$$(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$$

$$\forall 1 \leq j \leq m$$

$$\forall 1 \leq i \leq n$$

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_{4 \times 1} \quad C^T = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)_{1 \times 4}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = D^T$$

Def: On dit que $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (carré) est symétrique si $A = A^T$.

Propriétés (Thm sur la transposée)

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

↑
D

(la transposée

$$M_{m \times n} \rightarrow M_{n \times m}$$

$$A \mapsto A^T$$

est une transfo
linéaire

§2.2. Matrices inversibles et inverse d'une matrice ^{Lay} (p. 111)

Def: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (carrée)

est dite inversible s'il existe
une matrice $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

telle que $AB = I_n = BA$
Ce B , s'il existe, il est unique
et s'appelle l'inverse de A , noté A^{-1} .

(dans $\mathbb{R}$, tout $a \neq 0$ vérifie $a \cdot \frac{1}{a} = 1$)

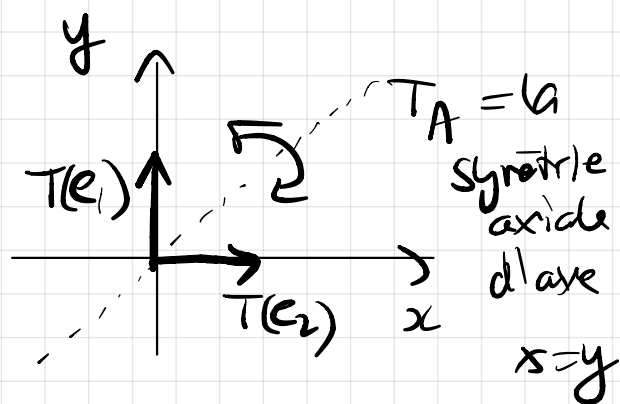
exemples:

• I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$
(car $I_n \cdot I_n = I_n$)

• O_n n'est pas inversible, car $\forall B$
on a $O_n \cdot B = O_n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{T(e_1)} \quad \underbrace{\quad}_{T(e_2)}$



$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $A = A^{-1}$

donc A est
égale à son
inverse!

• $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible

$$\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

• Si A vérifie $A^{17} + 3A^{10} - 7A^3 + \pi I_n = 0_n$
alors A est inversible.

Utilité de l'inverse d'une matrice

Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est inversible

alors $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, l'éq. matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

possède une et une seule solution: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

(⚠ le calcul de A^{-1} peut être coûteux).

Thm⁻¹: Soient A, B des matrices inversibles
Alors $\in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

1) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

2) AB et BA sont inversibles

$$\text{et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

3) A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

⚠ la somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible.

Def: Matrices élémentaires

Une matrice $E \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est élémentaire si elle s'obtient à partir de I_n

avec une seule opération elem

sur les lignes de I_n ,

3 Types de matrices élémentaires

① P_{ij} = la matrice obt. en échangeant
ligne i et ligne j de I_n
avec $i \neq j$

ex: $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

② $D_i(\lambda)$ = matrice obt. en
multipliant
la ligne i de I_n
par $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda \neq 0$

$$D_2(\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $E_{i,j}(\lambda)$ = mat. obt. en ajoutant
à la $j^{\text{ème}}$ ligne de I_n
 λ fois la $i^{\text{ème}}$ ligne de I_n

ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,3}(4)$.

Thm "élémentaire" : Les matrices élém.
sont inversibles

① $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$ (car $P_{i,j}^2 = I_n$)

② $D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $\begin{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0 \end{pmatrix}$

③ $E_{i,j}(\lambda)^{-1} = E_{i,j}(-\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

(et leurs inverses sont élémentaires).

Méga-Théorème (Thm 8, p. 121)

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ carrée, alors les cond. suivantes sont équivalentes :

a) A est inversible

b) A est ligne-équivalente à l'identité
(càd la forme échelonnée réduite de A est I_n)

c) A possède n pivots

d) $A\vec{x} = \vec{0}$ n'a que la sol. $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

e) les colonnes de A sont l.in. indépend.

f) la transfo $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective

g) $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, l'éq. $A\vec{x} = \vec{b}$ possède au moins une sol.

h) les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$

i) $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est surjective

j) il existe $C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $CA = I_n$

k) il existe $D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.q. $AD = I_n$

l) A^T est inversible

m) $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est bijective

n) A est produit de matrices élémentaires

(prouver...)

Méthode pratique pour savoir si A est inversible
et calcul de A^{-1}

1) On écrit $(A \mid I_n)$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

2) opérations sur $(A \mid I_n)_{n \times (2n)}$

jusqu'à obtenir

$(R \mid A')$

où R = la forme échelonnée réduite de A

3) Si $R \neq I_n$ alors A n'est pas inversible

Si $R = I_n$ alors A est inversible

$$\text{et } A' = A^{-1}$$

(Théorème)